Limity

Robert Mařík

27. června 2006

Obsah

1 Limity bez l'Hospitalova pravidla

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$$

Vypočtěte $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg} 1}{1+1}$$

- Dosadíme $x = 1$.
- Jedná se o dobře definovaný výraz. Funkce je tedy spojitá v bodě $x = 1$ a funkční hodnota je rovna hodnotě limity.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg} 1}{1+1} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2}$$

Určíme $\operatorname{arctg} 1$. Musíme doplnit schema

$$\operatorname{tg}(\cdot) = 1.$$

Řešení je

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

a proto $\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Vypočtěte $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg} 1}{1+1} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Zjednodušíme. Hotovo.

Vypočtěte $\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1}$$

Dosadíme ...

Vypočtěte $\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

...a upravíme.

Vypočtěte $\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$$

- Funkce je typu $\frac{\text{nenulový výraz}}{\text{nula}}$.
- Musíme proto studovat nejprve jednostranné limity. Začneme s limitou zprava.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

Dosadili jsme $x = -1$.

Vypočtěte $\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0}$$

- Musíme určit znaménko jmenovatele.
- Je-li x napravo od -1, pak $x > -1$ a platí $x + 1 > 0$.
- Jmenovatel je kladný.

Vypočtěte $\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} = -\infty$$

Limita zprava je $-\infty$.

Vypočtěte $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

Zkoumejme limitu zleva.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{-0}$$

- Je-li x nalevo od čísla -1, pak $x < -1$.
- Proto $x + 1 < 0$ a jmenovatel je záporný.

Vypočtěte $\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{-0} = +\infty$$

Limita je $+\infty$

Vypočtěte $\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{-0} = +\infty$$

Oboustranná limita $\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$ neexistuje.

Obě jednostranné limity jsou různé a oboustranná limita tedy neexistuje. Hotovo!

Vypočtěte $\lim_{x \to -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{}$$

- Určíme limitu čitatele a jmenovatele samostatně.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x$ může být určena z grafu funkce $y = \operatorname{arctg} x$.
- Funkce $y = \operatorname{arctg} x$ má vodorovnou asymptotu $y = -\dfrac{\pi}{2}$ v $-\infty$. Hodnota limity čitatele je $-\dfrac{\pi}{2}$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty}$$

Limita jmenovatele je $-\infty + 1 = -\infty$.

Vypočtěte $\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty} = 0$$

Konečná hodnota dělená nekonečnem je rovna nule. Vyřešeno!

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x}$$

Vypočtěte $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$$

Začneme s limitou v $+\infty$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty}$$

- Určíme zvlášť limity funkcí v součinu.
- Pokud dostaneme něco jiného než neurčitý výraz 0∞, stane se problém triviálním.
- Dosadíme. Výrazem $e^{-\infty}$ máme na mysli limitu $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x}\operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\operatorname{arctg} x = e^{-\infty}\operatorname{arctg}\infty$$

- Dosadíme do druhé funkce.
- Výrazem $\operatorname{arctg}\infty$ máme na mysli limitu $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0\frac{\pi}{2}$$

Zkoumáním grafů funkcí $y = e^x$ a $y = \operatorname{arctg} x$ zjistíme, že

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

a

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x}\operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\operatorname{arctg} x = e^{-\infty}\operatorname{arctg}\infty = 0\frac{\pi}{2} = 0$$

Součin je nula.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x =$$

Pokračujeme s limitou v $-\infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{\infty}$$

- Opět určíme limity funkcí, stojících v součinu.
- A opět nesmíme dostat 0∞, jinak bude úloha obtížná.
- Dosadíme. Protože platí $-(-\infty) = \infty$, dostáváme z prvního součinitele výraz e^{∞}. Tím máme na mysli limitu $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x}$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x}\operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\operatorname{arctg} x = e^{-\infty}\operatorname{arctg}\infty = 0\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\operatorname{arctg} x = e^{\infty}\operatorname{arctg}(-\infty)$$

Dosadíme do druhé funkce. Výrazem $\operatorname{arctg}(-\infty)$ rozumíme limitu $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x$.

Vypočtěte $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{\infty} \operatorname{arctg}(-\infty) = \infty(-\frac{\pi}{2})$$

Z grafů funkcí $y = e^x$ a $y = \operatorname{arctg} x$ plyne

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

a

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Hotovo!

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{\infty} \operatorname{arctg}(-\infty) = \infty(-\frac{\pi}{2}) = -\infty$$

Součin je roven $-\infty$.

Vypočtěte $\lim_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)$

Vypočtěte $\lim_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-4)=\infty^3+2\infty^2-4$$

- Začneme s limitou v $+\infty$. Dosadíme.

Vypočtěte $\lim_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-4)=\infty^3+2\infty^2-4=\infty+\infty-4$$

$$\infty^3=\infty,\qquad \infty^2=\infty$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-4)=\infty^3+2\infty^2-4=\infty+\infty-4=\infty$$

$$\infty+\infty-4=\infty$$

Vypočtěte $\lim_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-4)=\infty^3+2\infty^2-4=\infty+\infty-4=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-4)$$

Pokračujeme s limitou v $-\infty$.

Vypočtěte $\lim_{x\to\pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x\to\infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = (-\infty)^3 + 2(-\infty)^2 - 4$$

Dosadíme.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-4)=\infty^3+2\infty^2-4=\infty+\infty-4=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-4)=(-\infty)^3+2(-\infty)^2-4$$

$$=-\infty+\infty-4$$

$$(-\infty)\times(-\infty)\times(-\infty)=-\infty \qquad 2(-\infty)(-\infty)=\infty$$

Problém! Máme neurčitý výraz $-\infty+\infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-4)=\infty^3+2\infty^2-4=\infty+\infty-4=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-4)=(-\infty)^3$$

$$=-\infty$$

$$=-\infty$$

- Z teorie víme, jak tento problém vyřešit.
- Lze ukázat, že na výsledek má vliv jenom vedoucí koeficient. Ostatní koeficienty tedy vynecháme.
- Limita vedoucího člene je $-\infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-4)=\infty^3+2\infty^2-4=\infty+\infty-4=\infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-4)&=(-\infty)^3+2(-\infty)^2-4\\&=-\infty+\infty-4\\&=-\infty\end{aligned}$$

Hotovo!

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$$

Začneme s limitou v $+\infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

- Limita čitatele i jmenovatele je $+\infty$.
- A hrome! Dostáváme neurčitý výraz.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2}$$

- Z teorie víme, že limita se dá určit snadno – jenom z vedoucích členů čitatele a jmenovatele.
- Vynecháme tedy všechno ostatní.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2}$$

Upravíme

$$\frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2}.$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2}$$

Dosadíme $x = \infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

Použijeme známá pravidla pro počítání s nekonečnem.

Vypočtěte $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

- Pokračujeme s limitou v $-\infty$.
- Dosazením $x = -\infty$ dostáváme opět neurčitý výraz.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2}$$

Opět uvažujeme pouze vedoucí členy.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2}$$

Upravíme.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = \frac{-\infty}{2}$$

Dosadíme.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

Použijeme známá pravidla pro počítání s nekonečnem.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

Hotovo!

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

Vypočtěte $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$$

Začneme s limitou v $+\infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$$

Dosadíme $x = \infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$$

- Neurčitý výraz.
- Použijeme jenom vedoucí členy.
- Všechno ostatní lze zanedbat.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$$

Upravíme

$$\frac{2x^4}{3x^4} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vypočtěte} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$$

Limita konstantní funkce je ta konstanta.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

Pokračujeme s limitou v $-\infty$. Dosadíme $x = -\infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4}{3x^4}$$

- Máme neurčitý výraz.
- Použijeme jenom vedoucí členy.
- Všechno ostatní zanedbáme.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3}$$

Upravíme

$$\frac{2x^4}{3x^4} = \frac{2}{3}$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Limita konstantní funkce je ta konstanta.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Hotovo!

Vypočtěte $\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right]$.

Vypočtěte $\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x-\ln(x^2+x+1)\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x-\ln(x^2+x+1)\right]$$

Přepíšeme limitu.

Vypočtěte $\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right] = \boxed{\infty - \infty}$$

Protože $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$, dostáváme neurčitý výraz $\boxed{\infty - \infty}$.

$$\boxed{\text{Vypočtěte}\quad \lim_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right].}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right] = \boxed{\infty - \infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\ln x^2 - \ln(x^2+x+1)\right]$$

- Limity z neurčitých výrazů ve tvaru zlomku jsou obyčejně jednodušší. Napíšeme funkci jako zlomek. .
- Nejdříve oba členy napíšeme v logaritmickém tvaru.
- Použijeme pravidlo $\boxed{r\ln a = \ln a^r}$.

Vypočtěte $\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right] = \boxed{\infty - \infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\ln x^2 - \ln(x^2+x+1)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln \frac{x^2}{x^2+x+1}$$

Odečteme logaritmy podle pravidla $\boxed{\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}}$.

Vypočtěte $\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right] = \boxed{\infty - \infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\ln x^2 - \ln(x^2+x+1)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln \frac{x^2}{x^2+x+1} = \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+x+1}\right)$$

- Určíme limitu složené funkce.
- Nejprve prozkoumáme limitu vnitřní složky.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right] = \boxed{\infty-\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\ln x^2 - \ln(x^2+x+1)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln \frac{x^2}{x^2+x+1} = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}\right) = \boxed{\ln\frac{\infty}{\infty}}$$

Uvnitř máme neurčitý výraz.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2\ln x-\ln(x^2+x+1)\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x-\ln(x^2+x+1)\right]=\boxed{\infty-\infty}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\ln x^2-\ln(x^2+x+1)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2}{x^2+x+1}=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}\right)=\boxed{\ln\frac{\infty}{\infty}}$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}\right)$$

- Tohle jsme již počítali.
- Uvažujeme jenom vedoucí členy.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2\ln x-\ln(x^2+x+1)\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x-\ln(x^2+x+1)\right]=\boxed{\infty-\infty}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\ln x^2-\ln(x^2+x+1)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2}{x^2+x+1}=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}\right)=\boxed{\ln\frac{\infty}{\infty}}$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}\right)=\ln 1$$

Provedeme krácení ve výrazu $\frac{x^2}{x^2}$ a použijeme zřejmý vztah $\lim\limits_{x\to\infty}1=1$.

Vypočtěte $\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x-\ln(x^2+x+1)\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x-\ln(x^2+x+1)\right]=\boxed{\infty-\infty}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\ln x^2-\ln(x^2+x+1)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2}{x^2+x+1}=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}\right)=\boxed{\ln\frac{\infty}{\infty}}$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}\right)=\ln 1=0$$

$\boxed{\ln 1=0}$. Vyřešeno!

2 Limity na l'Hospitalovo pravidlo

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{1-e^x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{1-e^x}$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{1-e^x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{1-e^x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

Dosadíme. Protože $\arcsin 0 = 0$ a $e^0 = 1$, dostáváme neurčitý výraz.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{1-e^x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{1-e^x} = \boxed{\frac{0}{0}} \overset{\text{l'H.}}{=}$$

Použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{1-e^x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{1-e^x} = \boxed{\frac{0}{0}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-e^x}$$

Podle tohoto pravidla platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{1-e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\arcsin x)'}{(1-e^x)'},$$

pokud druhá limita existuje (ať konečná nebo nekonečná).

Vypočtěte $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{1-e^x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{1-e^x} = \boxed{\frac{0}{0}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-e^x} = -1$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-0}}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{1-e^x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{1-e^x} = \boxed{\frac{0}{0}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-e^x} = -1$$

Hotovo!

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

Vypočtěte $\lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$$

Začneme.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\ln x}{x^2+x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{x^2+x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\frac{\infty \ln \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Jedná se o neurčitý výraz.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\ln x}{x^2+x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{x^2+x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + 1}{2x+1}$$

Použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Při derivování dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x\ln x)'}{(x^2+x+1)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + x\frac{1}{x}}{2x+1}.$$

Vypočtěte $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x\ln x}{x^2+x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{x^2+x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x+1}{2x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\frac{\ln\infty+1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x \ln x}{x^2+x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{x^2+x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + 1}{2x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2}$$

Použijeme ještě jednou l'Hospitalovo pravidlo.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x \ln x}{x^2+x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{x^2+x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + 1}{2x+1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2} = 0$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\frac{\frac{1}{\infty}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Vypočtěte $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$$

Začneme danou limitou.

Vypočtěte $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\frac{0 - \sin 0}{\sin^3 0} = \frac{0}{0}.$$

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^3 x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^3 x} = \boxed{\frac{0}{0}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3\sin^2 x \cos x}$$

- Užijeme l'Hospitalovo pravidlo.
- Podle pravidla pro derivaci složené funkce platí

$$(\sin^3(x))' = 3\sin^2 x(\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x.$$

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^3 x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^3 x} = \boxed{\frac{0}{0}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3\sin^2 x \cos x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

Dosadíme. Protože $\boxed{\cos 0 = 1}$ a $\boxed{\sin 0 = 0}$, dostáváme stále $\boxed{\frac{0}{0}}$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^3 x} = \boxed{\frac{0}{0}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3\sin^2 x \cos x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x}$$

Užijeme l'Hospitalovo pravidlo ještě jednou. Ve jmenovateli dostáváme

$$(3\sin^2 x \times \cos x)' = 3.2\sin x \cos x \cos x + 3\sin^2 x(-\sin x)$$

(derivace součinu a derivace složené funkce).

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \boxed{\frac{0}{0}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3\sin^2 x \cos x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

Dosadíme. Stále $\boxed{\frac{0}{0}}$.

Vypočtěte $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3\sin^2 x \cos x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6\cos^3 x - 6.2.\sin^2 x \cos x - 9\sin^2 x \cos x}$$

Užijeme l'Hospitalovo pravidlo ještě jednou.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^3 x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^3 x} = \boxed{\frac{0}{0}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3\sin^2 x \cos x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6\cos^3 x - 6.2.\sin^2 x \cos x - 9\sin^2 x \cos x} = \frac{1}{6}$$

Dostáváme funkci, která je spojitá v $x = 0$. Skutečně, dosazením dostáváme dobře definovaný výraz a máme výsledek.

Vypočtěte $\quad \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \boxed{\frac{0}{0}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2}$$

Dosadíme. Přitom platí $\boxed{\operatorname{arctg} 0 = 0}$. Dostáváme neurčitý výraz a budeme používat l'Hospitalovo pravidlo.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \boxed{\frac{0}{0}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

Dosadíme a vidíme že se jedná stále o neurčitý výraz.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \boxed{\frac{0}{0}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{3(1+x^2)}$$

Je sice možno ještě jednou aplikovat l'Hospitalovo pravidlo, tato možnost však vede ke složitým výpočtům. Proto raději upravíme složený zlomek

$$\frac{1 - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{\dfrac{x^2}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{x^2}{(1+x^2)3x^2} = \frac{1}{3(1+x^2)}$$

Vypočtěte $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}$$

Dosadíme. Funkce je spojitá v bodě $x = 0$ a limitu tedy určíme přímo dosazením.

Find $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x.$

Find $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$.

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x$$

We start with the limit and substitute.

Find $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x.$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \boxed{0\times(-\infty)} \stackrel{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

The substitution gives and indeterminate form. We have to write the function in the limit as a fraction. To do this we write $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$ and multiply with logarithm.

$$\boxed{\text{Find } \lim_{x\to 0^+} x\ln x.}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \boxed{0\times(-\infty)} \stackrel{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

Now we have indeterminate form for which l' Hospital rule can be used.

$$\boxed{\text{Find } \lim_{x\to 0^+} x\ln x.}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \boxed{0\times(-\infty)} \stackrel{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

We use l' Hospital rule.

Find $\lim_{x\to 0^+} x \ln x.$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \boxed{0 \times (-\infty)} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to 0^+} -x$$

We simplify. The function in the limit is continuous at $x = 0$.

Find $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x$.

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \boxed{0\times(-\infty)} \stackrel{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to0^+} -x = 0$$

The limit of continuous function can be evaluated by direct substitution.

Find $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x.$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \boxed{0\times(-\infty)} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

The problem is solved.

$$\text{Find } \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}$$

Find $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}$$

We start with the limit.

Find $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \boxed{\infty \times 0}$$

Dosadíme. More precisely, we evaluate separately the following limits

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \qquad \text{and} \qquad \lim_{x\to\infty} e^{-x^2}.$$

We obtain an indeterminate form.

$$\boxed{\text{Find } \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \boxed{\infty \times 0} \stackrel{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}}$$

We have to convert the function inside the limit into fraction. We use the identity

$$e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$$

$$\text{Find } \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \boxed{\infty \times 0} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

The limit has the form required by the l' Hospital rule.

Find $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \boxed{\infty \times 0} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}}$$

We use l' Hospital rule.

Find $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \boxed{\infty \times 0} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}}$$

$$\overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}}$$

We simplify.

Find $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \boxed{\infty \times 0} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}}$$

$$\overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty}$$

Dosadíme (in the sense of limits). Hence we evaluate separately the limit of the numerator and the denominator.

Find $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \boxed{\infty \times 0} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}}$$

$$\overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

We obtain well–defined expression which equals zero. The problem is solved.

Find $\lim_{x\to\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})$

Find $\lim_{x\to\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Find $\lim\limits_{x\to\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\infty \times 0} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\text{Find} \quad \lim_{x\to\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\infty \times 0} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

Find $\lim_{x\to\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\infty \times 0} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \boxed{\frac{0}{0}} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{1+x^2}$$

$$\boxed{\text{Find} \quad \lim_{x\to\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\infty \times 0} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \boxed{\frac{0}{0}} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x^2}$$

Find $\lim_{x\to\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\infty \times 0} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \boxed{\frac{0}{0}} \overset{\text{úpr.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

Děkuji za pozornost, to je vše.